# 329. 多元環ノ*Ideal*ノ最小公倍數，最大公約數 III

中　山　　正（阪大）

§1.　前稿，特ニ II. §3 ニツヾイテ二ツノ *Maximalordnung* ノ *Summe*, *Durchschnitt* ヲ考察シテ次ノ定理ヲ証明スル。

<u>定理</u>　$\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}}$ ヲ多元環 $\mathfrak{r}$ ノ三ツノ *Maximalordnung* トスル、ソノ時若シ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}}$ デアルナラバ $\mathfrak{o} = \bar{\mathfrak{o}}$ デアル。

<u>定理</u> 同様ニ $\mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_0+\overline{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}=\overline{\mathfrak{o}}$ デアル。

コヽニ第二ノ主張ハ第一ノカラ直グ出ル（直接ニモ云ヘルガ）．ソレハ前稿 II.§2 デ述ベタ如ク $\mathfrak{o}_0\frown\mathfrak{o}$ ハ $\mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}$ ノ左及ビ右 Ordnung デアルカラ $\mathfrak{o}_0+\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_0+\overline{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}_0\frown\mathfrak{o}=\mathfrak{o}_0\frown\overline{\mathfrak{o}}$ トナルカラデアル。

証明ノ大要ヲ述ベル．ヤハリ im Kleinen デ且ツ normaleinfach ノ場合ニヤレバヨイ。

<u>補助定理 1</u>．アル $\mathfrak{p}$ 進多元体 D ノ整数元カラナル行列

$$\xi=\begin{pmatrix}\pi^{\rho_1} & e_{12} & \cdots & e_{1r}\\ & \pi^{\rho_2} & \cdots & e_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \pi^{\rho_r}\end{pmatrix};\quad 0\leqq\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots\cdots\leqq\rho_r$$

ニ於テ常ニ $\pi^{\rho_i}\,|\,e_{ik}$ ナリトスル（$\pi$ ハ D ノ Primideal ノ Primelement）．然ラバ D ノ整数元カラナル適當ナ行列 $\eta$ ヲトッテ

$$(1)\quad \eta^{-1}\begin{pmatrix}\pi^{\rho_1} & & & \\ & \pi^{\rho_2} & & 0\\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{\rho_r}\end{pmatrix}\eta=\begin{pmatrix}\pi^{\rho_1} & e'_{12} & \cdots & e'_{1r}\\ & \pi^{\rho_2} & \cdots & e'_{2r}\\ & & \ddots & \vdots\\ 0 & & & \pi^{\rho_r}\end{pmatrix},$$

且ツ $e'_{ik}\equiv e_{ik}\quad \mathrm{mod}\ \pi^{\rho_k}$

トナルヤウニ出來ル。

（証明）

$$\eta=\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1r} \\ & 1 & & f_{2r} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$ トオケバ $\eta^{-1}$モ $\eta^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & g_{12} & \cdots & g_{1r} \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

ナル形ニナル、然モ $f$ ガ ganz ナラ $g$ モソウデアル、而シテ實際ニ書イテ見レバ分カルヤウニ $g_{ik}$ $(i<k)$ ハ $f_{ik}$ 及ビ $l-j<k-i$ ナル如キ $f_{jl}$ トノミニヨツテ決定サレル。シカシテ $\begin{pmatrix} \pi^{\rho_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{\rho_r} \end{pmatrix}$ ヲ $\eta$ デ transform スレバ (1) ノ右辺ノ様ナ形ニナルガ，コノ際 $0\leqq\rho_1\leqq\cdots\cdots\leqq\rho_r$, $\pi^{\rho_i}|e_{ik}$ ナル関係ヲツカヘバ $e'_{ik}\equiv e_{ik} \bmod \pi^{\rho_k}$ トナル様ニ $f_{12}, f_{23}, \cdots\cdots, f_{1r}$ ヲ順次ニキメテ行クコトガ出來ルノデアル、実際書クト長クナルカラ省略スル。

<u>補助定理2</u>、 $\gamma$ ヲ $\mathfrak{p}$進数体 K ヲ Zentrum ニモツ単純環トシ，$\gamma$ ノ一ツノ Maximalordnung $\mathfrak{O}_0$ 及ビソノアル ganz ナ左 Ideal $\mathfrak{a}$ ガ與ヘラレテヰルトスル。然ラバ $\gamma$ ヲ適當ニ多元体 D ノ Matrizenalgebra トシテ，

$$\left\{\begin{array}{l} \text{1)}\ \ \mathfrak{O}_0 \text{ ハ D ノ ganz ナ元ノ行列全体トナリ} \\ \text{2)}\ \ \mathfrak{a} \text{ ガ} \\ \qquad \begin{pmatrix} \pi^{\rho_1} & e_{12} & \cdots & e_{1r} \\ & \pi^{\rho_2} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \pi^{\rho_r} \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} \pi^{\rho_i}|e_{ik} \\ 0\leqq\rho_1\leqq\rho_2\leqq\cdots\cdots\leqq\rho_r \end{array} \end{array}\right.$$

(勿論ココニ $r$ ハ $r^2=(\mathfrak{r}:K)/(D:K)$)
ナル形ノ元デ生成サレル $\mathfrak{O}_0$ ノ左 Ideal ニナル.

様ニ表現スルコトガ出來ル.

(証明) ソレニハ先ヅ 1) ダケガ満足サレル様ニ表現シ, ソレカラ更ニ行, 列ノ番號ノヨビ方ヲ適當ニカヘテ行ケバ 2) モ満サレル様ニ出來ルコトガ容易ニ証明サレル.

コノ二ツノ補助定理ヲツカヘバ容易ニ証明サレルゴトク

<u>補助定理3</u>　$\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{p}$ 進数体 $K$ ヲ Zentrum ニモツ單純環 $\mathfrak{r}$ ノ任意ノ二ツ Maximalordnung トスル. シカラバ $\mathfrak{r}$ ヲ多元体 $D$ ノ Matrizenalgebra トシテ

$$\begin{cases} 1) & \mathfrak{O}_0 \text{ ハ } D \text{ ノ gang ナ元ノ行列全体, 即チ} \\ & \mathfrak{O}_0=\sum\limits_{i,k} \varepsilon_{ik}\, \mathfrak{O}_D, \\ 2) & \mathfrak{O} \text{ ハ適當ナ } \rho_1 \leqq \rho_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \rho_r \text{ ヲトッテ} \\ & \mathfrak{O}=\sum\limits_{i,k} \varepsilon_{ik}\, \mathfrak{O}_D\, \pi^{\rho_k-\rho_i} \\ & \text{ナル形ニナル。} \end{cases}$$

様ニ表現スルコトが出來ル。タゞシ $\varepsilon_{ik}$ ハソノ際ノ Matrizeneinheiten, $\mathfrak{O}_D$ ハ $D$ ノ Maximalordnung トス。

更ニ他方ニ於テ

<u>補助定理4</u>　$\mathfrak{p}$ 進多元体 $D$ ノ Matrizenalgebra $\mathfrak{r}=D_r$ ノアル Maximalordnung $\mathfrak{O}$ がソノ $r$ 個ノ對

角線上ノ Matrizeneinheiten $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \text{-------}, \varepsilon_{rr}$ ヲ含ンデヰルナラバ適當ニ $\nu_1, \nu_2, \text{-------}, \nu_r$ ヲトツテ

$$\mathfrak{o} = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \mathfrak{o}_D$$

ナル形ニカケル。

（証明）　$\mathfrak{o} \ni \varepsilon_{ii}$ ナルコトカラ $\mathfrak{o}$ ハ $\sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{a_{ik}} \mathfrak{o}_D$ ナル形ニナリ、$\mathfrak{o}$ ガ Maximalordnung ナルコトカラ $\sum a_{ik} = 0$ トナル。勿論 $a_{il} + a_{lk} \geqq a_{ik}$ デアルガ、コレト $\sum a_{ik} = 0$ ナル関係カラ適當ナ $\nu_1, \text{-------}, \nu_r$ ヲトツテ $a_{ik} = \nu_k - \nu_i$ ナル形ニ出來ルコトガ証明セラレル。

補助定理3，4カラ我々ノ主張ガ容易ニミチビカレル。$\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}, \bar{\mathfrak{o}}$ ノ $\mathfrak{o}_0, \mathfrak{o}$ ニ補助定理3ヲ適用シテ、ソコノ條件ヲミタス様ニ $\gamma$ ヲ表現スレバ

$$\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \pi^{\mathrm{Max}\,(0,\, \rho_k - \rho_i)} \mathfrak{o}_D$$

$$= \sum_{i<k} \varepsilon_{ik} \pi^{\rho_k - \rho_i} \mathfrak{o}_D + \sum_{i \geqq k} \varepsilon_{ik} \mathfrak{o}_D$$

トナル。シカシテ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o}$ ハ $\varepsilon_{11}, \text{---------}, \varepsilon_{rr}$ ヲフクムカラ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ナラ $\bar{\mathfrak{o}}$ ハ補助定理4ノ條件ヲミタシ，従ッテ

$$\bar{\mathfrak{o}} = \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\nu_k - \nu_i} \mathfrak{o}_D,$$

$$\mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}} = \sum \varepsilon_{ik} \pi^{\mathrm{Max}\,(0,\, \nu_k - \nu_i)} \mathfrak{o}_D$$

トナル、ヨッテ

(2) $Max(0, \nu_k - \nu_i) = Max(0, \rho_k - \rho_i)$;

$i, k = 1, 2, \cdots\cdots, r$

トナリ、コレカラ容易ニ $\rho_k - \rho_i = \nu_k - \nu_i$ ガスベテノ $i, k$ ニ成立ツ、ヨッテ $\mathfrak{o}$ ト $\bar{\mathfrak{o}}$ ハ一致スル。

(結果ガ一寸意外デモアルノデ少シク不安デスガ多分間違ハナイツモリデス。)

§2. 更ニ

定理 $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}_0 + \bar{\mathfrak{o}}$ デアル。

(証明) ソレハヤハリ上ノ補助定理3,4ヲツカッテ上ノ証明ト全ク同様デアッテ (2) ノカハリニ

$$Max(0, \nu_k - \nu_i) \leqq Max(0, \rho_k - \rho_i)$$

トナリ, シタガッテヤハリ $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \nu_r$ デ, 且ツ $k > i$ ナラバ $\nu_k - \nu_i \leqq \rho_k - \rho_i$ トナル。依ッテ $\mathfrak{o}_0 + \bar{\mathfrak{o}} \leqq \mathfrak{o}_0 + \mathfrak{o}$ ナルコトハ容易ニ証明セラレル。更ニ逆ニ

定理 $\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}_0 + \bar{\mathfrak{o}}$ ナラ $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}}$ デアルモ成立スルガ、ソノ証明ハ次ノ稿ニ書カセテイタダキタイ。然モ

定理 $\mathfrak{o}_0 \cap \mathfrak{o} \leqq \mathfrak{o}_0 \cap \bar{\mathfrak{o}}$ (即チ $\mathfrak{o}_0 + \mathfrak{o} \geqq \mathfrak{o}_0 + \bar{\mathfrak{o}}$) ナラバ $\mathfrak{o}$ ノ $\mathfrak{o}_0$ ニ対スル Distanzideal ハ $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ $\mathfrak{o}_0$ ニ対スルソレニヨッテ割レル。

（証明）　ソレハヤハリ $\nu_k - \nu_i \leqq \rho_k - \rho_i$ ナルコトカラ容易ニ証明セラレル。

云ヘカヘレバ Durchschnitt ガ小ニナル程遠ク(?)ナルト云フ結果デアル。タダシ上ノ定理ノ逆ガ成立タナイコトハ容易ニワカル。